

**Dritter Nachtrag zu
"Gleichkantige konvexe Polyeder"**

Weil ich den Anspruch erhebe, alle konvexen, gleichkantigen Polyeder mit nicht mehr als zehneckigen Flächen aufzulisten, muss ich noch einmal sechs nachträglich entdeckte Gleichkanter melden.

Es ist der Baukasten für ein Rhombotriakontaeder von der TriGam SA, Neuenburg (u.a. Jean Bauer, den ich kennen lernen durfte), durch den ich auf die sechs mir entgangenen Gleichkanter aufmerksam wurde.

- Es sind dies
- das RhombenIkosaeder
 - das flache RhombenDodekaeder
 - das schlanke, goldene S-Hexaeder
 - das linsenförmige, goldene L-Hexaeder
 - das schlanke Wurzel-2-S-Hexaeder
 - das linsenförmige Wurzel-2-L-Hexaeder

Der erwähnte Baukasten macht auch auf die möglichen Zerlegungen der Rhomben-N-Eder in Hexaeder aufmerksam.

Im folgenden sei Die Zahl des goldenen Schnittes mit f bezeichnet

$$f = (\sqrt{5}+1)/2$$

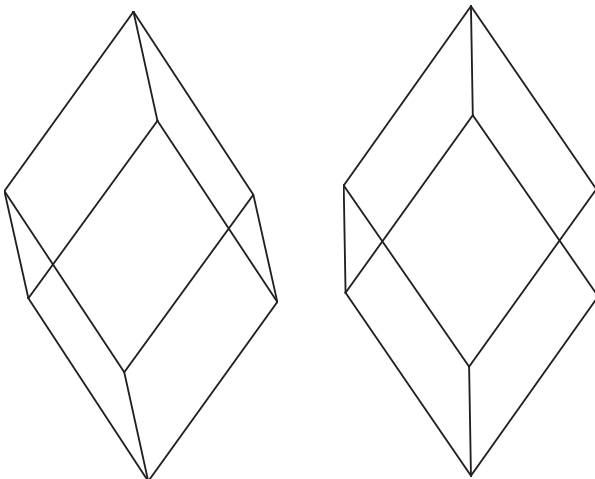
Zahlenangaben für Volumen und Oberflächen beziehen sich, wenn nicht anders angegeben, auf eine Skalierung, in der Kanten die Länge eins haben.

Die hier vorgestellten 4 Hexaeder sind Mitglieder einer Familie mit unendlich vielen Mitgliedern, die nur verschiedene Rhombenwinkel haben. Rhomben ohne spezielles Diagonalenverhältnis haben aber kaum eine Chance, konvexe Gleichkanter aufzubauen.

Das schlanke Wurzel-2-S-Hexaeder

Das schlanke Wurzel-2-S-Hexaeder wird mit sechs Rhomben aufgebaut, die das Diagonalenverhältnis $\sqrt{2}$ haben und die das normale RhombenDodekaeder begrenzen.

Die Stereoansicht ist folgende



Volumen = 0.86

Oberfläche = 5.66

kleiner Raumwinkel = 6.47 %

grosser Raumwinkel = 14.51 %

In der Skalierung, wo die kleine Rhombendiagonale den Wert eins hat, fallen die Formeln besonders einfach aus:

Volumen = $\sqrt{5}/4$

Oberfläche= $3*\sqrt{2}$

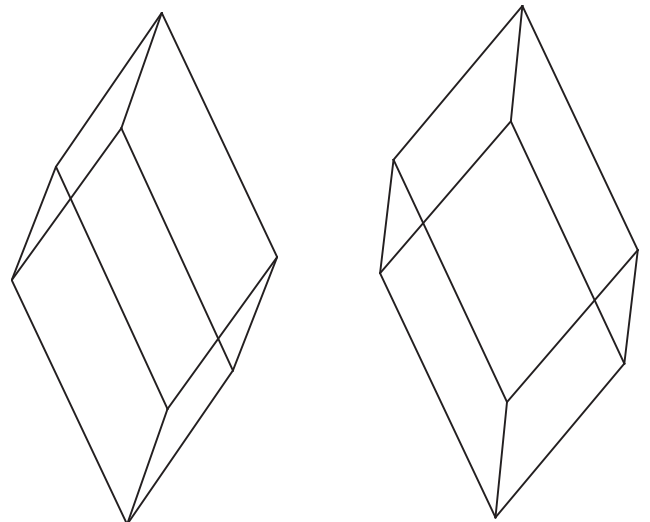
Um die Werte für Kantenlänge eins zu erhalten ist mit dem Faktor k^3 oder k^2 zu multiplizieren, wobei

$k = 2/\sqrt{3}$ ist.

Das linsenförmige Wurzel-2-L-Hexaeder

Mit den gleichen sechs Rhomben kann man beim Bau etwas anders vorgehen und erhält ein flacheres Hexaeder: das linsenförmige Wurzel-2-L-Hexaeder.

Die Stereoansicht ist folgende



Volumen = 0.54

Oberfläche = 6.93

In der Skalierung, wo die kleine Rhombendiagonale den Wert eins hat, fallen die Formeln besonders einfach aus:

Volumen = $\sqrt{2}/4$

Oberfläche= $3*\sqrt{2}$

kleiner Raumwinkel = $25/3$ % = $1/12$

grosser Raumwinkel = 25 %

Dieser auffallend runde Raumwinkel ist der gleiche, wie derjenige der Dreier-Ecke des RhombenDodekaeders. Durch die Zerlegung des RhombenDodekaeders in 4 linsenförmige Wurzel-2-L-Hexaeder, die, wie später für das flache RhombenDodekaeder gezeigt, möglich ist,

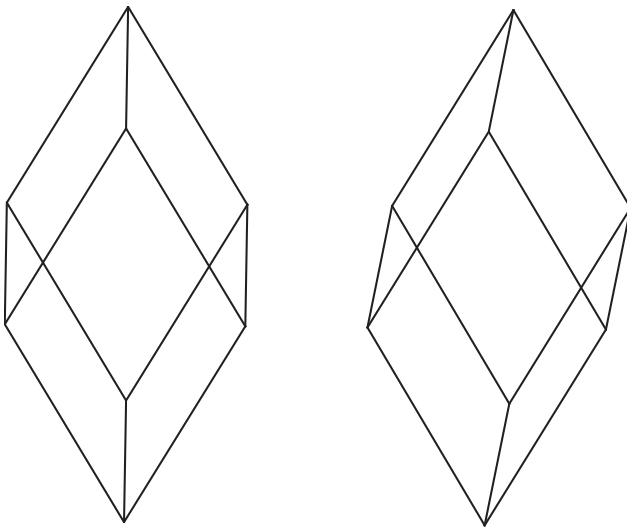
wobei hier nur der linsenförmige Typ verwendet wird, wird der runde Raumwinkel von $1/4$ einsichtig: in der Mitte der Zerlegung treffen nämlich vier grosse Raumwinkel raumfüllend zusammen ($100\% / 4 = 25\%$).

Beim zerlegten RhombenDodekaeder stossen an der äusseren 4er Ecke zwei kleine Raumwinkel zu $1/12$ zusammen, was für diese Ecke $2 * 1/12 = 1/6 = 16.67\%$ ergibt. Der früher angegebene Wert von 15.49% ist falsch.

Das schlanke goldene S-Hexaeder

Das schlanke goldene S-Hexaeder wird mit sechs Rhomben aufgebaut, die das goldene Diagonalenverhältnis haben und die das RhombenTriakontaeder begrenzen.

Die Stereoansicht ist folgende



$$\text{Volumen} = 0.76$$

$$\text{Oberfläche} = 5.37$$

$$\text{kleiner Raumwinkel} = 5\%$$

$$\text{grosser Raumwinkel} = 15\%$$

Es ist bemerkenswert, dass das Hexaeder, wenn ein Rhombus flach auf dem Boden aufliegt, genau die Höhe einer halben Grossdiagonale des Rhombus hat. In der Skalierung, wo die kleine Rhombendiagonale den Wert eins hat, fallen die Formeln besonders einfach aus:

$$\text{Volumen} = (f/2)^2$$

$$\text{Oberfläche} = 3f$$

Um die Werte für Kantenlänge eins zu erhalten ist mit dem Faktor d^3 oder d^2 zu multiplizieren, wobei

$$d = 2/\sqrt{2+f} \text{ ist.}$$

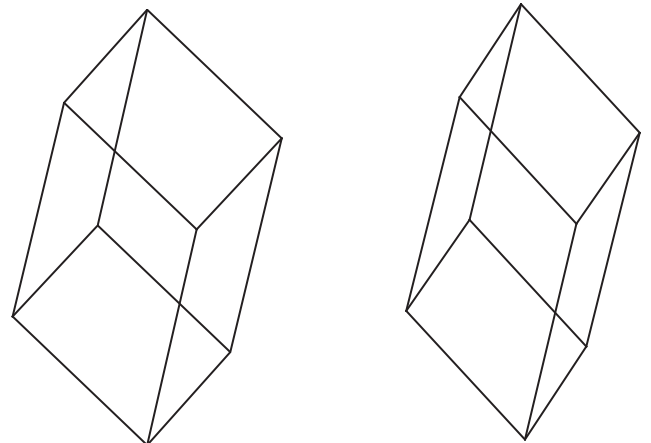
Wiederum treten hier erstaunlich runde Raumwinkel auf. Dass der kleine Raumwinkel 5% betragen muss, kann man einsehen, wenn man beachtet, dass 5 spitze Ecken unseres Hexaeders zu einer 5er-Ecke des Rhombentriakontaeders gebüschelt werden können, deren Raumwinkel 25% beträgt!

Der grosse Raumwinkel ist genau dreimal grösser als der kleine. Siehe dazu weitere Ueberlegungen bei der goldenen Linse.

Die goldene Linse

Mit den gleichen sechs Rhomben kann man beim Bau etwas anders vorgehen und erhält ein flacheres Hexaeder: das linsenförmige goldene L-Hexaeder.

Die Stereoansicht ist folgende



$$\text{Volumen} = 0.47$$

$$\text{Oberfläche} = 5.37$$

$$\text{kleiner Raumwinkel} = 5\%$$

$$\text{grosser Raumwinkel} = 35\%$$

Es ist bemerkenswert, dass das Hexaeder, wenn ein Rhombus flach auf dem Boden aufliegt, genau die Höhe einer halben Kleindiagonale des Rhombus hat. In der Skalierung, wo die kleine Rhombendiagonale den Wert eins hat, fallen die Formeln besonders einfach aus:

$$\text{Volumen} = f/4$$

$$\text{Oberfläche} = 3f$$

In der weiter unten gezeigten Zerlegung des flachen RhombenDodekaeders, sieht man, dass die Spitze aus zwei spitzen Linsenecken oder aus zwei spitzen Ecken des schlanken S-Hexaeders zusammengesetzt werden können. Also sind die kleinen Raumwinkel der beiden Hexaeder gleich (5%).

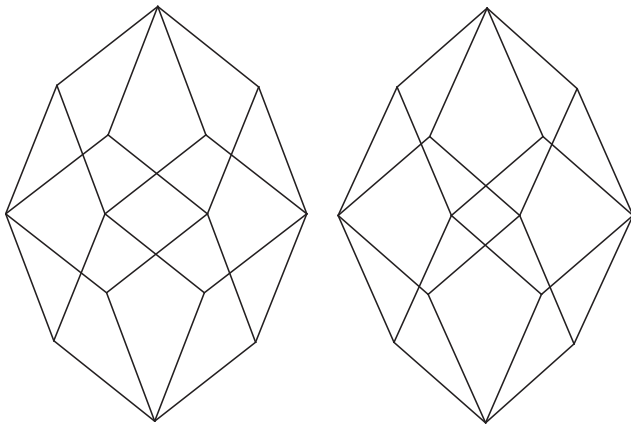
Weil man andererseits zwei stumpfe S-Ecken mit einer spitzen L-Ecke zu einer stumpfen L-Ecke kombinieren kann und dies auch mit drei spitzen L-Ecken, einer spitzen S-Ecke und einer stumpfen S-Ecke gelingt, folgt,

- dass die stumpfe S-Ecke 3 mal grösser ist als die spitze S-Ecke
- und dass die stumpfe L-Ecke 35% betragen muss.

Das flache RhombenDodekaeder

Das flache RhombenDodekaeder wird mit zwölf Rhomben aufgebaut, die das goldene Diagonalenverhältnis haben und die das RhombenTriakontaeder begrenzen.

Die Stereoansicht ist folgende



Volumen = 2.46
 Oberfläche = 10.73

In der Skalierung, wo die kleine Rhombendiagonale den Wert eins hat, fallen die Formeln besonders einfach aus:

Volumen = $(2f+1)/2$
 Oberfläche = $6f$

Es treten vier verschiedene Raumwinkel auf, die alle rund ausfallen, weil sie aus den schon bekannten runden aufgebaut werden können.

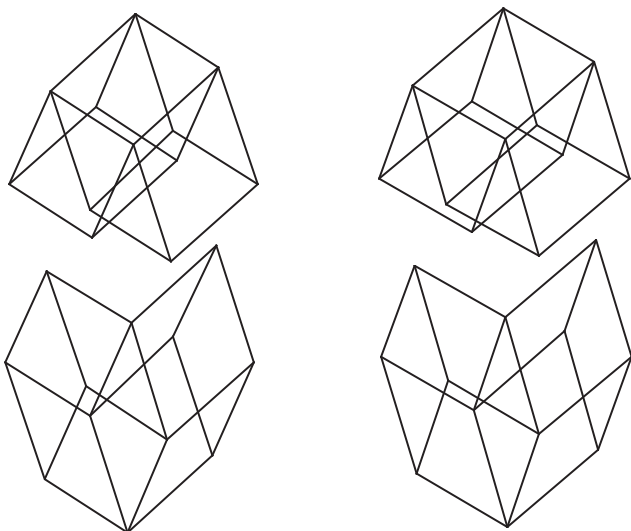
Die kleinste Ecke ist aus zwei spitzen S-Ecken aufbaubar und hat deshalb den Wert 10 %.

Die zweitkleinste Ecke entspricht der stumpfen S-Ecke: 15 %.

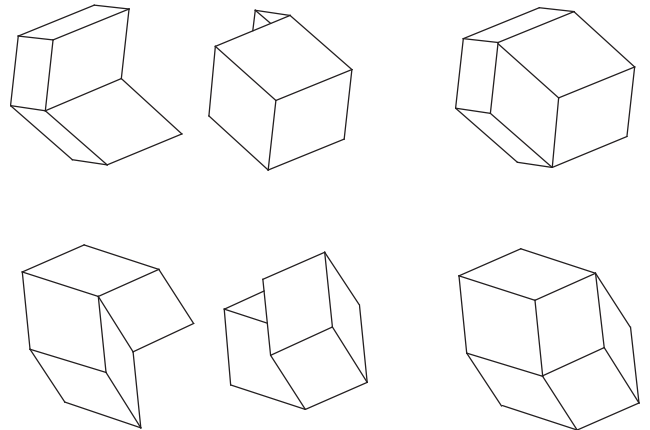
Die zweitgrösste Ecke ist aus einer spitzen L-Ecke und einer stumpfen S-Ecke aufbaubar und hat deshalb den Wert 20 %.

Die grösste Ecke entspricht der stumpfen L-Ecke: 35 %.

Es folgt eine Stereoansicht der Zerlegung des flachen Rhombendodekaeders. Der eine Teil ist ein doppeltes S-Hexaeder und der andere Teil eine doppelte Linse.



... und zwei Normalansichten



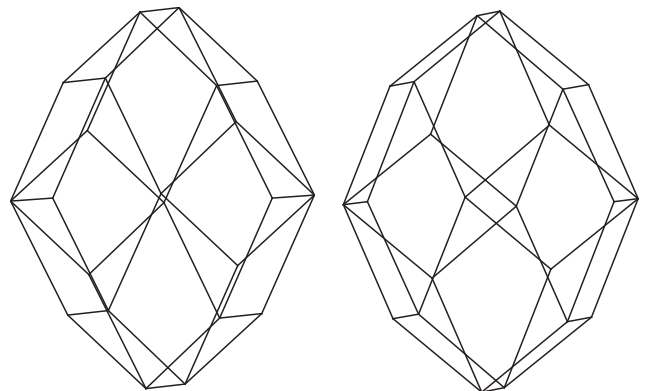
Wenn man die doppelte Linse als Pfeilspitze ansieht, kann das zusammengesetzte Polyeder als *gerichtet* definiert werden. Wie wir weiter unten sehen werden, spielt dies beim Zählen der verschiedenen Zerlegungen des Rhombentriakontaeders eine Rolle.

Es gibt keinen kontinuierlichen Uebergang vom normalen zum flachen Rhombendodekaeder.

Das Rhombenkosaeder

Das Rhombenkosaeder wird mit zwanzig Rhomben aufgebaut, die das goldene Diagonalenverhältnis haben und die das Rhombentriakontaeder begrenzen.

Die Stereoansicht ist folgende



Volumen = 6.16
 Oberfläche = 17.89

kleiner Durchmesser von Spitz zu Spitz = 2.50

In der Skalierung, wo die kleine Rhombendiagonale den Wert eins hat, fallen die Formeln besonders einfach aus:

Volumen = $(2f+1) 5/4$
 Oberfläche = $10f$

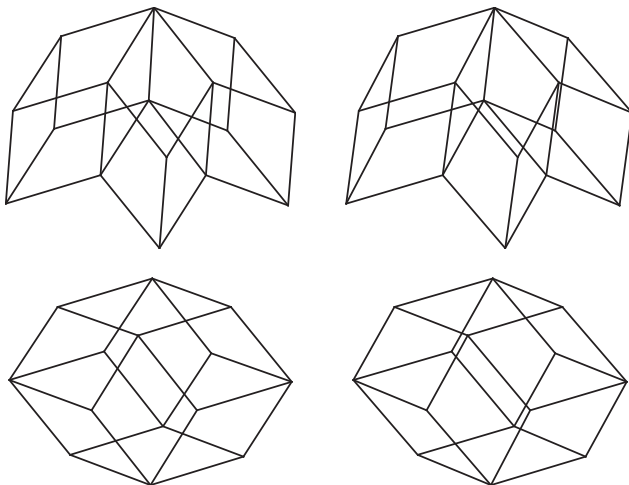
Das Volumen ist *genau halb* so gross wie dasjenige des Rhombentriakontaeders!

Es treten vier verschiedene Raumwinkel auf, die alle rund ausfallen, weil sie aus den schon bekannten runden aufgebaut werden können.

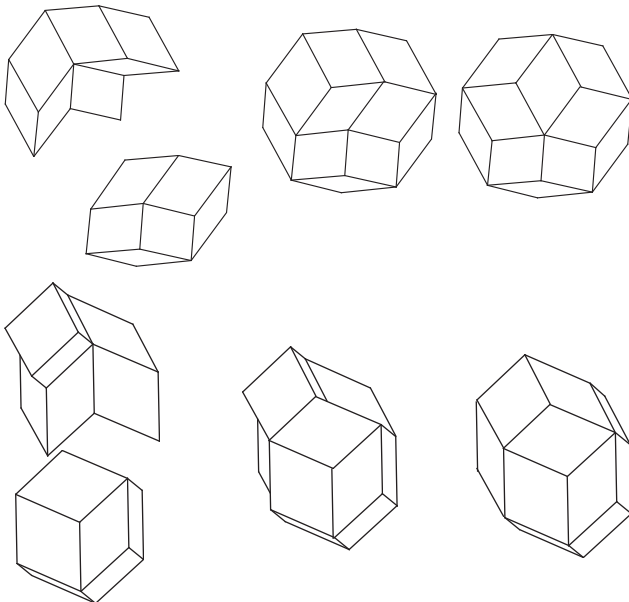
Die kleinste Ecke ist aus einer spitzen L-Ecke und einer stumpfen S-Ecke aufbaubar und hat deshalb den Wert 20 % (schon im flachen RhombenDodekaeder angetroffen).

Die mittlere und die grösste Ecke entsprechen der 5er Ecke (25 %) und der 3er Ecke (35 %) im Rhomben-Triakontaeder.

Es folgt eine Stereoansicht der Zerlegung des Rhombenkosaeders. Der eine Teil ist ein dreifaches S-Hexaeder und der andere Teil ein flaches RhombenDodekaeder. Drei goldene Linsen, die drei Eindrückungen auffüllen müssen, sind hier weggelassen.



... und zwei Normalansichten

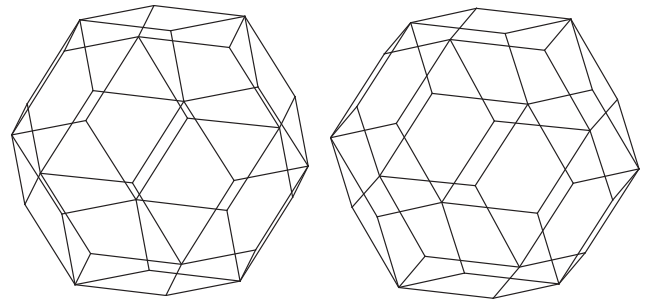


Wenn ich die Richtung des flachen RhombenDodekaeders umkehre, erhalte ich keine echt neue Zerlegung, weil sie das Spiegelbild der ersten ist.

Das RhombenTriakontaeder

Das RhombenTriakontaeder wird mit dreissig Rhomben aufgebaut, die das goldene Diagonalenverhältnis haben..

Die Stereoansicht ist folgende



Volumen = 12.31

Oberfläche = 26.83

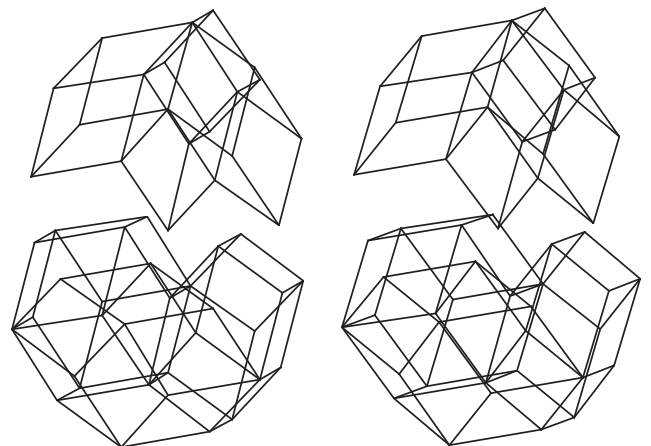
In der Skalierung, wo die kleine Rhombendiagonale den Wert eins hat, fallen die Formeln besonders einfach aus:

Volumen = $(2f+1) 5/2$

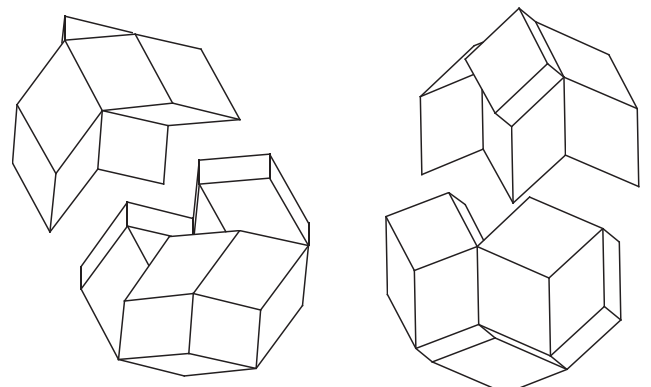
Oberfläche = 15f

Durchmesser = 4-f

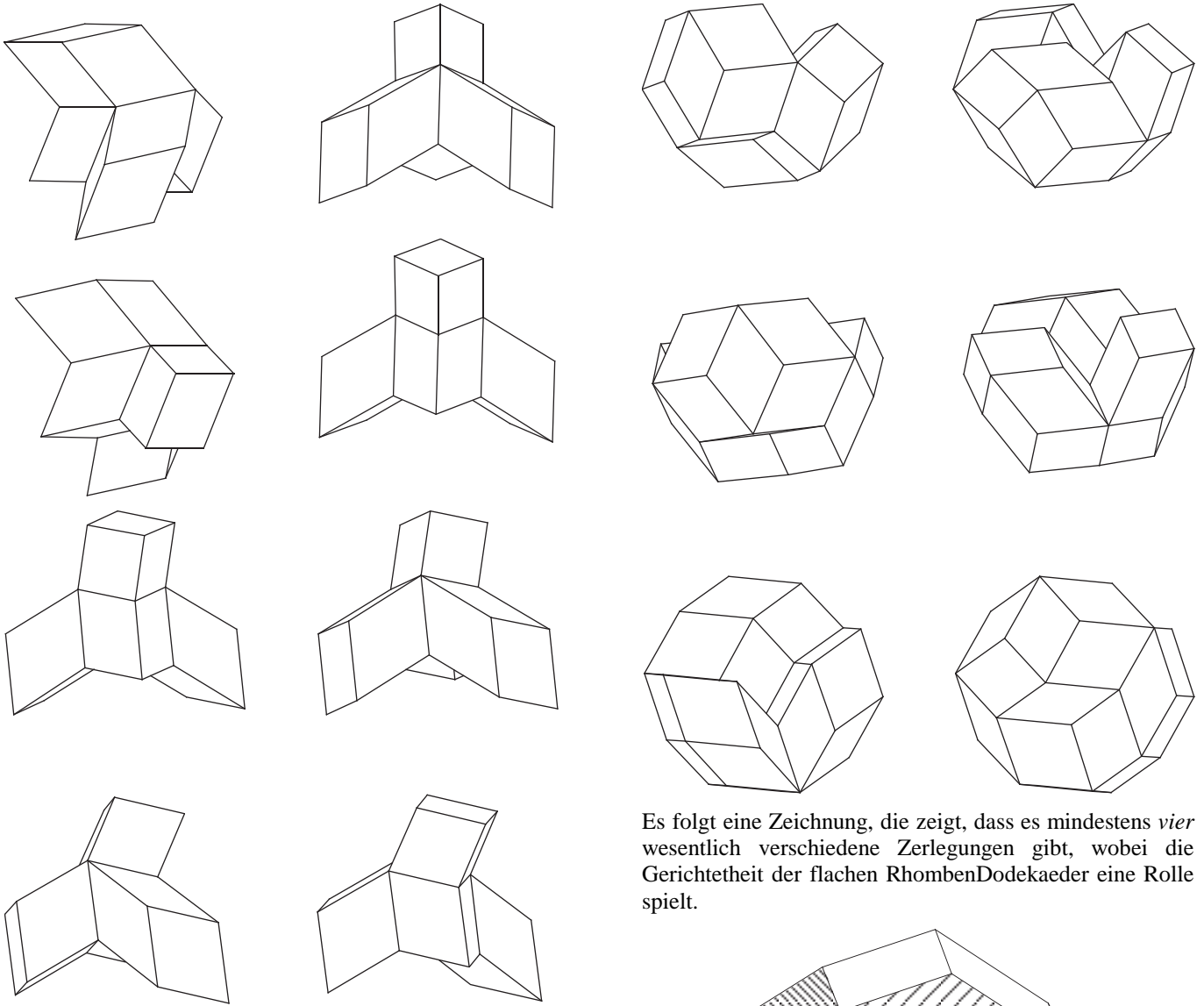
Es folgt eine Stereoansicht der Zerlegung des RhombenTriakontaeders. Der eine Teil ist ein vierfaches S-Hexaeder und der andere Teil ein Ring von drei flachen RhombenDodekaedern. Vier goldene Linsen, die vier Eindrückungen auffüllen müssen, sind weggelassen.



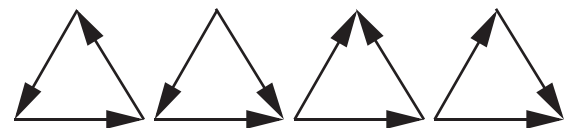
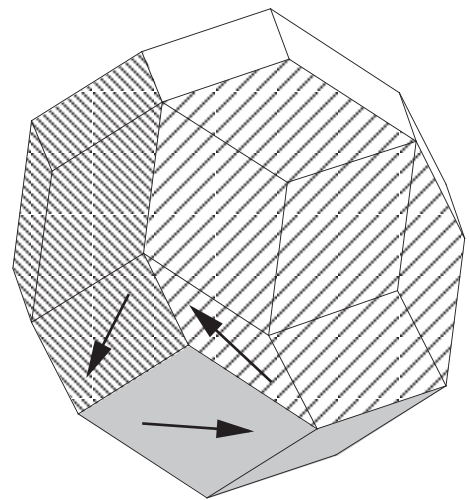
... und zwei Normalansichten



Ich zeige jetzt die zwei Teile der Zerlegung noch in diversen Orientierungen



Es folgt eine Zeichnung, die zeigt, dass es mindestens vier wesentlich verschiedene Zerlegungen gibt, wobei die Gerichtetheit der flachen RhombenDodekaeder eine Rolle spielt.



P.S.

Bei den Hexaedern kann noch folgende Ueberlegung angestellt werden. Ein einzelner Typ der Hexaeder lässt

sich zu einer Stange mit rhombischem Querschnitt aufstapeln. Solche Stangen können den Raum lückenlos füllen (Kristall). An jedem Punkt des so konstruierten Gitters stossen im Fall eines schlanken Hexaeders zwei spitze und sechs stumpfe Ecken zu einem Totalraumwinkel von 100% zusammen. Im Falle des linsenförmigen Hexaeders sind es zwei stumpfe und sechs spitze Ecken.